私が霊感を受けた日のこと
私と数学

2000.8.24 永田和弘

あれは私が高校三年生の二学期の期末テストの日のことでしたからクリスマス前後のことだと思います。明日は英語と数学 III の試験で、時期も時期ですからそれは大学の模試も兼ねていました。英語の勉強に一段落を付けて、数学に取りかかったのは夜の 10 時を過ぎていたと思います。

私の高校は伊勢高校で当時は進学校として地域では有名な高校でしたが、私の成績は余り良くありませんでした。正直言って、後ろから数えた方が早いくらいの成績で、進路指導の基準からすれば大学受験はおぼつかないレベルでした。しかし、妙なことに自分では自分を劣等生とは思っていませんでしたし、付き合う友人にも秀才が多かったように思います。また、成績には反映されませんでしたが勉強は実に毎日よくするほうでした。クラスには一人くらいそのような人がいますが、よく勉強はするのだが、成績がさっぱりという、私はそのような生徒でした。

私を支えていたのは根拠のない自尊心だったかもしれません。しかし、その自尊心も明日の数学 III の試験勉強の前には全く形無しでした。今まで勉強してきたはずの積分の簡単な問題が解けないのです。それは無理関数の不定積分でした。「こんな筈はない」と焦りを感じましたが、解き方をすっかり忘れてしまったのか、頭の中が真空になってしまって何も思い出せないのです。そうなのです。私は数学を解き方の問題と考えていました。解くためには定石というものがあって、それを使わなくては問題は解けないと考えていましたし、だから、数学の出来・不出来は定石をいくつ知っているかどうかに懸かっていると思っていました。私はその定石を忘れたのか無理関数の積分の問題に手も足も出ません。いったん、そうなると全てが出来なくなってしまいました。そこで、積分を諦めて半分だけでも確保すべく、微分だけに専念することにしました。しかし、どうしたことでしょう無理関数の微分も出来ないではありませんか。万事休す。明日の数学は完全にお手上げです。時刻は 12 時をまわりました。

今までに感じたことのない不安と孤独と助けて欲しい気持ちになりました。1961 年頃は、一般家庭では暖房器具といっても火鉢くらいです。どてらという綿入りの半天を着込んで手袋をして勉強をしていましたが、頭の芯まで暗く冷たい感じがして、泣きそうになりました。どれほど呆然としていたでしょ

うか。気持ちが落ち着き、焦っても仕方なく、最初からやり直すしかないと自分を諭しました。明日のためにではなく、出来ない自分のために最初からやり直そうと気持ちを決めたら、妙に心が落ち着いてきました。

微分の最初のページは平均変化率です。勿論、言葉は知っていましたし、見覚えのある式も並んでいます。しかし、平均変化率は入試問題の微分にはほとんど関係ありませんし、じっくりと読んだこともありませんでした。明日のためではなく、できない自分のためです。最初から始めると決めたことですから、試験のためにではなく、飛ばさないで平均変化率のページもしっかりと読み始めたのです。数学を国語の教科書のように一字一句をしっかりと読んだのはその時が初めてのことでした。すでに 40 年も昔のことです。手元にはその時の教科書はありませんが、内容はほとんど一緒の解説を現在の教科書にも見いだせます。ここに再録しておきますから、あのときの私と同様に、以下の「微分係数の定義」を読んでみて下さい。

****

微分係数の定義

関数 $y=f(x)$ について考えてみる。

今、xが $x+\Delta x$ になったときのyの値を $y+\Delta y$ で表わせば、

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x)$$

すなわち、$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$

ここで、両辺を Δx で割ると

$$\Delta y／\Delta x=\{f(x+\Delta x)-f(x)\}／\Delta x$$

これは xと $x+\Delta x$ との間の区間におけるyの平均変化率である。

今、$x=a$として、$\Delta x\to 0$なるときのこの商の極限値が存在するならば、それを通例 $f'(a)$ で表わし、$x=a$ における $f(x)$ の微分係数という。

またこの極限値が存在するとき $f(x)$ は $x=a$ で微分可能であるという。微分係数はxの関数であって、導関数といい、$f'(x)$ で表わす。

すなわち、$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\{f(x+\Delta x)-f(x)\}／\Delta x$

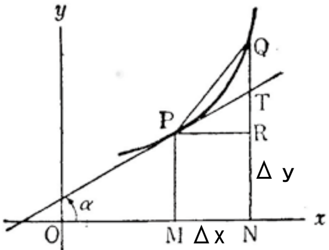
微分係数の幾何学的意味

$f(x)$ が $x=a$で微分可能であれば

$\Delta y／\Delta x=\{f(a+\Delta x)-f(a)\}／\Delta x$ .... PQの勾配

$\Delta x\to 0$ なるとき $\Delta y／\Delta x\to f'(a)$

(図のQがPに近ずくとき、P，Qを結ぶ直線の極限の直線をPにおける接線



という)

定理

f'(a) はx＝aにおける f(x) の接線の勾配を意味する

****

そこには今までに知らない世界がありました。解き方の世界ではなく、考え方の世界が展開されていました。約束事の世界と言っても良いかもしれません。「知っている・知らない」の世界ではなく、「条件ごと・納得」の世界です。定石として解き方の公式を覚えるのではなく、解き方の考え方を覚えるのです。たとえ、忘れても自分独力でその定石を導き出せなくてはなりません。例えば、こうです。

$y = x^2$ の導関数を求めるに当たり、

「$y = x^n$ のとき、y の導関数は $y' = (n-1)x^{n-1}$ である。」を忘れたとしても、定義に従って導関数を導き出せないといけません。

$y = x^2$ のとき

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\{(x + \Delta x)^2 - x^2\}/\Delta x$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\{x^2 + 2\cdot x\cdot \Delta x + \Delta x^2 - x^2\}/\Delta x$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\{2x+\Delta x\}$$
$$= 2x$$

もっとも、高校生では $y = x^n$ のnは 1,2,3 に限られてはいます。

問題は考え方です。この考え方が出来たときに $y = \sqrt{\ } x$ や $y = 1/\sqrt{\ } x$ は解けるのです。 $y = \sqrt{\ } x$ の導関数を導いてみましょう。

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\{\sqrt{\ }(x + \Delta x) - \sqrt{\ } x\}/\Delta x$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\{x + \Delta x - x\}/\Delta x\{\sqrt{\ }(x + \Delta x) + \sqrt{\ } x\}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}1/\sqrt{\ }(x + \Delta x) + \sqrt{\ } x$$
$$= 1/2\sqrt{\ } x$$

$y = 1/\sqrt{\ } x$ は少し難しいですが Δx を使って導関数を求めてみて下さい。定石や定理や公式は覚えるのではなく、導き出せねばなりませんし、誰にでも導き出せるのです。いたって簡単に、自明の公式を使って、誰の批判を受けることなく、諄々と諭すように、こつこつと登りつめていくように、確実にゴールに向かって進めていくことが出来るのです。こんなにきれいに、簡潔に、明瞭に、反論の余地なく展開させることが出来るのは数学の論証以外にはあり得ないでしょう。数学は、最初の定義とか条件とかを設定すれば、

天空の外の世界に驚く人
Camille Flammarion, The Heavens, from L'Atmosphere Meteorologie Populaire, 1888 in the style of C.1520, woodcut, Fr./orrery, early 19th-C, Eng.

この絵は私が数学の世界を見た時の驚きとよく似たイメージを持っています。無限の広がりを持つ天空から首を出すと、更なる広がりを持つ更なる世界が展開しているのを知りました。

数学は私の世界を更に広くから包含していました。このことは私に次の予感を与えました。「私の知らなかった数学の世界はとてつもなく広く私の外に広がっていた。ひょっとしたら、別の学問の世界もまた、数学の世界と同様に、私の世界を包含して私の世界の外に広がっているかもしれない。」

その範囲内でしかありませんが、一つの世界を持つのです。私の知らなかった新しい世界の発見。私は自分があたかも風船の中から首を出して外の広がる世界に驚いている子供のように感じました。この数学の世界の“発見”は私の人生を素晴らしい可能性あふれたものに変えました。あなたにも私が体験した大転換が訪れることを期待します。とにかく、私は $y = \sqrt{(x+1)}$ を見たときに、x について整理できないと思った瞬間、仰天してしまって積分や微分どころではなくなってしまったのです。私が微分法の基本を終えたときは朝が白々と明け始めていました。どうやら、徹夜をしてしまったようです。しかし、これ程充実して、希望があふれて、喜びに燃えた朝を迎えたことはありませんでした。私はこのときの勉強では微分・積分の応用までは出来ませんでしたが、「今は何もできないが、これからは出来る」という妙な“自信”だけが付きました。そして、意気揚々と「0点覚悟」の数学の試験を受けに登校したのでした。

学校に着いたら、これから始まる数学の試験にクラスの秀才達が何か一つの問題について論議していました。それは次のような式でした。

$$\lim_{x \to 0} \{f(x + \Delta x^2) - f(x)\} / \Delta x$$ をもとめよ。

ある人は Δ x が 1 より大きいか小さいか区別する必要があると言いました。私にはこの式は f(x) の導関数に似てはいるがグラフでは説明の付かない式

に思えました。x が Δ x だけ変化した場合の y の増分であれば

$$f'(x) = \lim_{\cdot x \to 0}\{f(x + \Delta x) - f(x)\} / \Delta x$$

でなくてはなりませんし、$f(x + \Delta x^2) - f(x)$ の増分を考えるのであれば分母は Δx^2 でなくてはなりません。分母を Δx^2 とするために分母子に Δx を乗じると上式は

$$f'(x) = \lim_{\cdot x \to 0}\{f(x + \Delta x^2) - f(x)\}\Delta x / \cdot x^2$$

となり、Δ x →0ですから、

$$f'(x) = \lim_{\cdot x \to 0}\{f(x + \Delta x^2) - f(x)\}\Delta x / \Delta x^2 = 0$$ となります。

私の意見に皆は驚きました。そして、答えはその通りだったのです。

そのときのテストの結果は覚えていません。大したことはなかったと思います。しかし、私は人生の中で文字通り大きなクリスマスプレゼントをもらったのです。数学はこのようにして勉強するのだ。今は高校３年生の最後期です。気が付いた今の学力が私の学力とされるには悔しい想いがしてきました。気が付いたこの考え方でもう一度最初から数学をしてみたいと思いました。もしそれで、数学の成績が相変わらず悪ければ、自分のいたらなさを認めよう。しかし、この新しい考え方で勉強すれば、必ずや私の学力は今のようなものではないと思われました。私は受験はおろか、新年を待たずして浪人を決意したのです。

その後の思い出（その 1）

大学受験に浪人生活を二年も送ったことが、私にとって良かったかどうか、またそれが私にどのように作用したかは私の内部で賛否両論があります。しかし、私が歯科医になる目標達成には現実に二年間が必要だったのですし、その二年間が私にクリスマスプレゼントの本当の意味を教えるに必要な期間だったのです。確かに、「天空の外の世界に驚く人」の衝撃を受けたことは事実です。しかし、いかに高等学校の数学 III とはいえ、一晩の衝撃で分かるほど易しいものではありません。言葉の上で「基本から入れ」と分かったつもりでいても、いつの間にか基本をないがしろにしている自分がありました。神様は「分かっていないのに分かったつもりになっている」私を懲らしめる意味で二浪を与えられたのだと思います。二浪目を迎えた春に「そこまで基本に帰らねばならないのか」と思ったことがありました。そして、このとき、私は「基本に還れ」という私の高校時代の恩師である松原達夫先生の口癖を思い出しました。数学がなかなか分からない私に、松原先生が「数学は

テクニックではなく、考えることだ」と教えていただいたことが昨日のように思い出されます。数学の重要なところは「公式の暗記ではなく、公式の意味とその公式を自分自身で導き出せることだ」とも教えていただきました。そして、一つの例を示していたいたことがあります。それは因数分解と判別式の関連でした。この意味が本当に実感されるには二浪という時間が必要でした。ここに 45 年前の松原先生の「教え」と理解の「実感」を再現してみましょう。

二次関数 $y = ax^2 + bx + c$ の右辺を因数分解出来る人はかなり数学が出来る人だと思います。この因数分解に必要な数学的素養は中学生レベルで十分なのですから、ひょっとしたら私だけができなかったのかも知れません。正直なところ、因数分解は因数分解の分野で、二次式は二次式の分野でしか考えてこなかった私には、二次式の一般式を因数分解するという発想が出来なかったのです。数学が“出来る・出来ない”はたとえ使用する道具は中学生レベルのものでも、なんとか駆使して目的に近づこうとする意欲と工夫の問題です。

さて、二次式の一般式を因数分解してみましょう。この世界は、数学が根底ではどの学問分野にも繋がっていることを教えられました。

先ず、$ax^2 + bx + c$ を強引に $m^2 + 2mn + n^2 = (m + n)^2$ に持ち込む工夫をしてみましょう。

$ax^2 + bx + c$

$= a (x^2 + b/a\ x) + c$

$= a \{ x^2 + b/a\ x + (b/2a)^2 - (b/2a)^2 \} + c$

$= a \{(x + b/2a)^2 - b^2/4a^2 \} + c$

ここで $m^2 - n^2 = (m + n)(m - n)$ に持ち込むと

$= a \{(x + b/2a)^2 - b^2/4a^2 \} + 4a^2c/4a^2$

$= a \{(x + b/2a)^2 - (b^2- 4ac)/4a^2\}$

$b^2- 4ac$ を無理矢理に平方根にすると、次のように因数分解できる。

$= a (x + b/2a + \sqrt{\ } (b^2- 4ac)/2a) (x + b/2a - \sqrt{\ } (b^2- 4ac)/2a)$

これは二次式 $ax^2 + bx + c = 0$ となるときの x の解を求めていることに外ありません。 $x = - b \pm \sqrt{\ } (b^2- 4ac) / 2a$ は 解の公式 です。

平方根の中の $b^2- 4ac$ が正または0の場合は実数根を持ち、負の場合は虚根を持つため、$b^2- 4ac$ が根の判別式と呼ばれていることはご承知の通りです。

その後の数学にまつわる思い出（その 2）

私は東京で浪人生活を送ることになりました。母の妹、叔母を頼っての上京でした。高校時代は成績は上がらないが勉強熱心な学生であったことは述べましたが、浪人時代も相変わらずでした。私は 2 年間の浪人生活を東京で送りましたが、皇居がどこにあるかを知らずに浪人時代を過ごしました。後に、大学生になったとき上京して皇居が東京駅のあまりに近いところにあることを知って驚いた位です。一浪目は代々木ゼミナール、二浪目は高田馬場の一橋学院の予備校に通いましたが、本当に叔母の「大泉学園」と予備校のイタチ道のごとき往復しか知りませんでした。その中での一浪時代のことです。高校のクラスメートで早稲田に合格した川村悟君に誘われて早稲田の大学祭に行ったことがあります。私の記憶の中には、大隈講堂も女子大生も何もありません。あるのは、薄暗い階段教室で聞いた特別講座のシーンだけです。亀井勝一郎氏の『日本の精神と文化』と一松信先生の『関数の歴史』が行われました。最初の私の目当ては亀井勝一郎氏の講話でしたが、今となっては何も記憶に残っていません。彼の見事な白髪がかろうじて記憶にあります。ついでながら聞いた一松先生の『関数の歴史』は非常に面白いものでした。　中でも、数学者の名前は忘れましたが、微分不可能な連続曲線の話は私の数学観を一変させました。それは巨視的には連続曲線だが、Δｘ→0に近づけていくと微視的には折れ線になっているという微分不可能な関数でした。黒板には雪の結晶のようなギザギザの関数のグラフを書かれたのを覚えています。このときに私は学ぶ数学だけではなく、創り出す数学の興味を持ちました。妙な威張りかたをしますが、浪人の分際で『関数の歴史』に興味を持つ人はそうざらにはいないと思いました。

こうして、私と数学の体験を述べてくると、私が数学の素質に恵まれていたように思われるかも知れません。ここで私は正直に私を述べておかねばなりません。私が結局は数学の世界に入らなかった、いや、入れなかったのは数学的な素質に欠けていたからだと思っています。私は極端に計算力が弱かったのです。自虐的にと思えるほど計算練習もしてみましたがその結果は電話がかけられなくなってしまいました。当時の電話機はダイヤル式で自分が回した数字に自信が持てず電話ができなくなるのです。数学者になるのでなければ計算力に長ける必要はないでしょう。数学的な世界が必要なのです。その世界を見るには、計算力は必要ですが、それは数学の世界の一要素でしかありませんし、自虐的な訓練によって獲得されるものでもないことが私の人生の後半になって分かるところとなりました。このことについては

次の更なる話に託したいところがあります。

その後の数学にまつわる思い出（その 3）

1+1=2。数学的明証性は古今東西を通じて変わることはありません。しかし、日本の数学（和算）と西洋の数学とは違うと数学史の小倉金之助は言っています。万国普遍と思われる数学を通しても日本の独自性が語れることは素晴らしい事です。私が大学の数学に期待したことは高等学校では学べなかったことが学べることでした。

しかし、その期待は大学における数学の授業の第一限目で裏切られました。歯科医になる私に科せられた数学的素養とは、あたかも与えられた未知の課題を既知の課題に還元する思考と計算力だと言わんばかりのものでした。

“既成のものに如何に組み込むか”と“ミスのない遂行（計算力）”が強制されました。目的のない数学、人生の教訓が得られぬ数学。それは私の一番嫌いなものでした。私は大学時代以来、全く数学からは疎遠になり、20 年という歳月が経過しました。

そんな私に再び数学のきっかけを与えてくれる機縁が訪れます。それは、パソコンでプログラムを組むことでした。ベーシック言語では達成できる機能は限られていたので、友人達の勧めでパスカル言語で文献整理をするソフトを組むことになったのです。半年ほど苦しみましたが、気に入るソフトが組めません。そこで面識もない『入門 Turbo パスカル』の著者の東京理科大学教授の上坂吉則先生に電話をすることにしたのです。「先生の著書の読者です。感激の中に読み進んでいますが、うまくできません。助けて下さい。」

先生のお宅に直接伺って、教えを請うことになりました。沢山のパスカルの入門書が数ある中で先生の著書が一番基本から諄々と説かれており、「Turbo パスカル」の日本で一番の先生と確信しておりましたから、どのように教えていただけるのか期待に胸が膨らんでいました。パソコンを前に、見る見るうちにプログラムが組まれていくのだろうか、それとも、前もって文献検索を目的とするソフトとお話ししてありましたから、既にできあがっているかも知れないと空想をして先生のお宅に入ったのでした。

通された部屋には期待に反してパソコンは有りませんでした。目の前には白紙用紙と鉛筆とが置かれてあって、「さあ、作りましょう」ということになりました。私が「パソコンは ?」と問うと、「先ず、紙から始めなさい」と教えられました。結局、その日は私が文献検索といっても、何がしたいのか、を

明確にすることで終わりました。その時、私は遠い日の数学を思い起こしていました。第一日目の作業は、“問題を前にどのような条件の中で対応しようとしているのか”という条件の明確化を計ることでした。文献ソフトが与えられたら、それは私の前で夢のように展開していく、と言ったものではなく、自分が作る文献ソフトは自分が与えただけのことしかできないのですから何をさせたいかが最重要であり、そこが曖昧だから私は永遠にプログラムが組めなかったのでした。このソフト開発も、結局は、上坂先生に全てを作成していただくこととなり、このプログラムは 10 年たった現在でもなくてはならない道具となっています。　数学的な遂行とは、条件・環境を整えて論理的に諄々と進めていくことだということを、ソフトを作製するという実践を通して教えていただいた気がしました。

その後の数学にまつわる思い出（その 4）

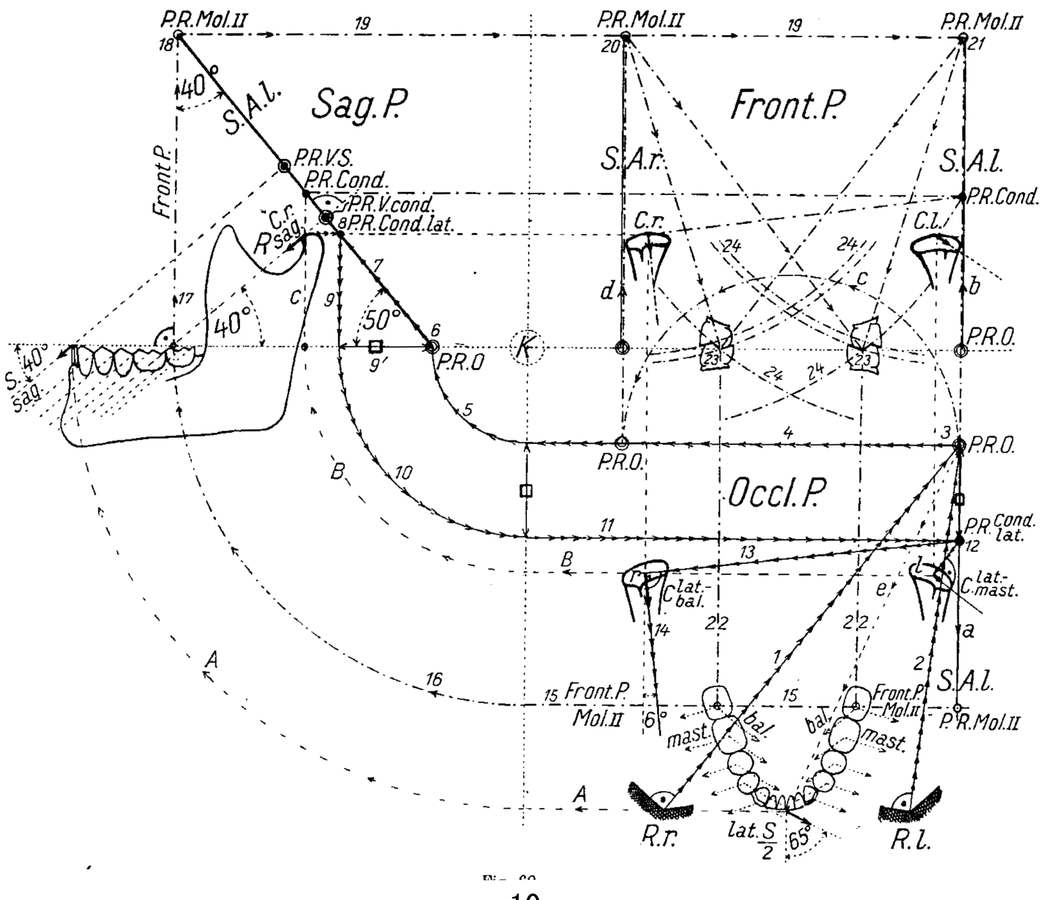
私は歯科医ですから、義歯を作ったり歯に“かぶせ”を作ります。それらは患者さんの口の動きに調和していないと、皆も経験があると思いますが、咬んだら変な当たり方をして歯が痛くなったり違和感があってとても咬めたものではありません。患者さんの咬み合わせに調和するように、“当たり”を削って調整します。これを「咬合調整」と言っていますが、“かぶせ”の作り方が悪いと調整に時間がかかってしまい、一本の歯に 1 時間も悪戦苦闘する場合があります。これは歯科医にとっても患者さんにとってもつらいことです。この事態を避けるためには精密な型どりによる正確な歯の模型と顎の運動を精密に再現する装置（咬合器）が不可欠です。

現在の歯科治療は精密な歯型の方はほぼ期待レベルに達成されていますが、咬合器の方はほとんど 100 年前のレベルに止まっています。咬合運動の再現装置のメカニズムが現在なお曖昧であり、その上、その運用がやたらと煩雑で、それにかかる時間とか人件費を考えると現実的ではないのです。このような状況ですから、顎運動が完全に再現できる装置（咬合器）の開発や、顎運動の観測と分析は現在でも歯科医の夢です。

今から 70 年ほど前、スイスのチューリッヒ大学の歯科補綴教授であるアルフレッド・ギージーも顎運動の再現装置の開発には情熱的な学者でした。かれは、人の顎の運動を立体幾何学による運動論として確立しました。もっとも、人の顎運動は個人差が大きくて、同一個人にあっても顎の動かし方や食品によっても顎運動は微妙に変化をします。　1908 年に N.G. ベネットは

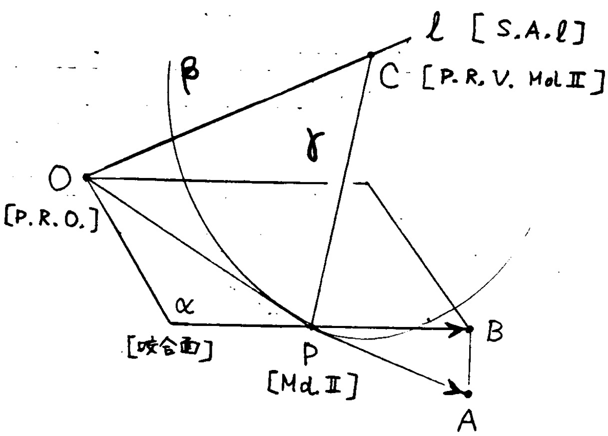
完全な咬合器は不可能だとさえ言ったぐらいです。ギージーは微視的なことにこだわらないで、概略的にでも顎運動が把握できたら、それからでも得られることは大きいと考えました。1920 年代では顎運動の測定・分析手段も発達していなかったので、小さな動きは完全には捕らえきることが出来ずにいましたから、ギージーはその微少な運動部分を“無視が許される微少運動”と考えたのです。一般的には物体の運動は回転要素と移動要素の複合したものです。ギージーは小さい移動要素は無視してゼロと考えました。つまり、顎運動を単純な回転運動と仮定したのです。これは驚くほど大胆な発想でした。しかし、この前提からギージーは顎全体の運動はおろか一本一本の歯の動きまでもを作図上に描き出すことに成功しました。ギージーはこの理論を 155 の挿図を交えて 171 ページの書にまとめました。この理論は軸学説と呼ばれています。

図は軸学説の中でも簡単な作図例ですが、当時もそして現在でもギージーの作図は難しく思われています。私も斜面盤上に描かれた円は水平面では楕円になるはずなのに、楕円ではなく円で処理されていることが不思議でし



た。「ギージーは誤っているのではないか」という論文も有りましたから、やはりギージーは誤っているのではないかと思いました。しかし、本当のところは分からずじまいでした。ギージーは咬合器の上でも重要咬合器を開発しており、「咬合器の歴史」を綴る上でも避けて通れぬ人物ですし、彼の「軸学説」は「咬合論の歴史」を綴る上でも省くことができない重要な理論でした。理解しなければならないが理解できないという袋小路の中でも、「ギージーの幾何学を解くことができるのは私だ」と難問にしがみついていたのは、これも高校時代の思い出によります。それは、伊勢高校の数学の先生でクラス担任でもあった山路強先生の励ましでした。「永田君は視覚的センスが鋭いね」。この一言が成績の良くない私に自分は幾何学が得意だという根拠のない自信を与えていました。苦しくなると「山路先生、助けて」が口癖でした。ギージーの幾何学の前でこの口癖を唱えていた時です。本当に山路先生の導きとしか思えないチャンスが訪れました。

永田歯科医院に患者さんとして東京大学の数学の教授でいらっしゃる田村二郎先生が来院されました。関数論がご専門ということで、幾何学とは無関係と思っていたので、ギージーのことは会話に上りませんでした。しかし、あるとき、ギージーに苦しんでいることを申し上げたら、「もう少し詳しく聞かせてください」ということになりました。驚いたことに、田村先生は幾何学には天才のような「閃き（ひらめき）」をもたれた方でした。この「幾何学の閃き」は先生の言葉で「職人的数学直感」なのだそうです。先生への誤解がないように一言を添えますと「数学に直感は必要であるが、直感で数学をしてはならない」も先生の言葉です。田村先生のお宅にギージーの著書や関連論文、咬合器を携えてお宅を伺ったのは平成 6 年の暑い夏の日でした。2 週間後、田村先生によるギージー解説に関する論文が届けられました。ギージーに取り組んだ 25 年間の夢が手に入った瞬間でした。しかし、私のレベルではその解説が更に解説を要する状態で、理解ができるようになるまでには更に 2 年位の質問と論文の形をとった解説の往復が必要でした。ようやくにして、田村先生の説明とご教授で「ギージーは正しい」ことが分かりました。但し、ギージーは顎運動を単純化して考察していますから、単純化を現実にはそぐわない（誤っている）と言うのでればそれはその通りです。このギージー理解を通して、直感は大事だが、最後の詰めを直感でしてはいけないことを学びました。ギージーの「顎運動を単純な回転運動と仮定すれば、顎の 2 点の運動ベクトルが分かれば、顎全体の運動は再現できる」は幾何学的



[証明]
Pを通り、lに垂直な平面をβとし、βとlとの交点をC とする。
このとき PA ⊥ PC
したがって、PAはlとPを含む平面OCP(γ)に垂直である。
つまり、PA ⊥ OP (1)
他方、AB ⊥ α であるからABはα上の任意の直線に対して垂直である。
すなわち、 AB ⊥ OP (2)
(1)と(2)から OP ⊥ 平面PAB
したがって、OPは平面PAB上の任意の直線に対して垂直である。
すなわち、 OP ⊥ PB [証明終]

演繹により、証明できるのです。私はこれを「田村の証明」と呼んでいます。

また、斜面盤上に描かれた円は水平面では楕円になるはずという疑問も解けました。「斜面β上に円がある。その円が水平面 α と交わる点をPとし、点Pにおける円の接線をPAとする。次に接線PAを水平面 α へ投影してPBとする。斜面上の円の中心軸lが水平面と交わる点をOとすれば、

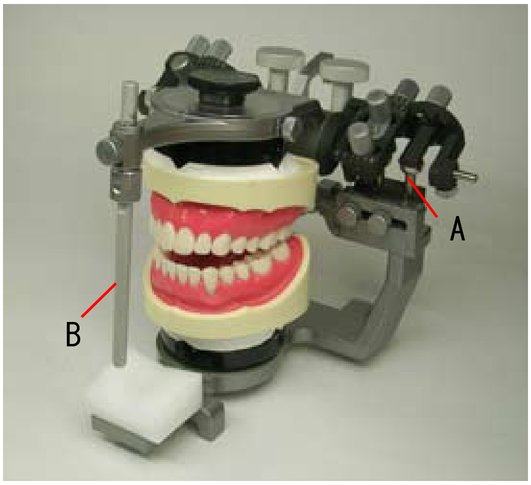
OP⊥PB である。」(証明は上図参照)

つまり、「斜面β上の円が水平面αへ投影してできる楕円の接線は、Oを中心とし、Pを通る水平面α上の円の接線と一致する」これは田村先生によって証明され、田村先生によって「ギージーの定理」と命名されました。

数学的帰結は、そのプロセスが正しい限り、絶対に正しいのです。

その後の数学にまつわる思い出(その5)

歳をとると、身体上でも種々の変化が見られます。特に白髪と歯の脱落は老化の代表的な現象です。歯の喪失が始まると、人は咬めるところで咬もうとします。その結果、例えば、右咬みに偏ると右の関節が痛んだり、右の肩や首が凝ったり、右の偏頭痛を生じたりします。このような状態が半年とか数年も続くと顎の骨や筋肉がそのように固まっていきます。歯科医は、単に歯が抜けたから歯を入れるというだけではなく、顎がずれている場合には正しい位置に修正してあげなくてはなりません。しかし、現実の臨床ではこの処置は極めて困難なのです。というのは、現在の患者さんの顎の位置は咬合器に取り付けられるのですが、修正した位置に付けることは正しい位置が分からないと付けられないわけですから、正しい位置が見つからぬ限り取り付けられないのです。間違っているかも知れない現在の位置から咬合器上



BGN咬合器

咬合器は上下顎の模型を取り付けて、顎運動を再現する装置です。患者さんの歯型や運動が精密に再現されると、製作された「義歯」や「かぶせ」は生体に調和した咬みやすいものになります。咬合器の単純なものでは近似的な運動しかできません。BGN咬合器は世界で最初の生体に忠実に精密に再現する咬合器です。(A:顆頭球、B:切歯指導釘)

で修正位置へ持ち込むためには、最低限度いくつの条件を考えねばならないか。この課題に数学的根拠を与えていただいたのが、文献整理をするソフト開発で前述した東京理科大学の数学の教授でいらっしゃる上坂吉則先生です。

****

「咬合器上で、下顎模型を上顎模型に対して、三次元的に任意の場所に移動するには

1） 下顎模型が水平面上を自由に移動・回転できること

2） 左右の顆頭球と切歯指導釘の高さが自由に調節できること

この二つの条件が必要であり、十分である」

****

また、咬合器上で下顎模型が前方・左右側方運動を再現するするためには、一つの関節の動きを最低 5 つの規定板で規制しなくてはならない。つまり、咬合器の左右の顎関節部は前方・左方・右方の運動を再現するためには各々 5 つの規制板で規制される必要があることを数学的に示していただいたのは「Gysi の定理」をご教授いただいた田村二郎でした。従来の全調節性咬合器はは 4 つの規制板しか持たないために、不完全な全調節性咬合器だったのです。「自然は全て数字という言葉で書かれている」はガリレイの言葉です。確かなことを述べるためには数学的根拠が示されねばなりません。そして、私は前方・左方・右方の運動を再現する 5 つの規制板

を持つ本当の全調節整咬合器であるBGN咬合器を作ることに成功しました。

おわりに

一般の人々が数学を駆使できるというわけには行かないでしょう。しかし、数学を知り数学的に考えることは出来ます。文学者のようにはなれないけれども文学から人生を豊かにすることが出来るように、数学者にはなれないけれども数学から人生を豊かにして下さい。数学が苦手と言うだけで自分の進路を数学的分野から避ける大学受験生や「因数分解が歯医者にどれだけ役に立つのか」と思われる方々に、こんな数学の人生的効用があるよと述べたくて数学に疎い私が「数学と私」という大仰な題目でこの小論を書いたのです。

「市民の数学を創りたい」田村二郎

「コンピューターは現代の 読み・書き・そろばん」上坂吉則

「数学はテクニックではなく、思考である」松原達夫

「重要なことはより単純に、よく整理して考えることだ」山路強

終わり

2000. 8.31-2002.4.10